22

D. D.

DISSERTATIO ACADEMICA
CONTINENS

THEORIAM ARTIS BALLISTICÆ,

QUAM
CONSENSU AMPLISS. FACULT. PHILOSOPH.
IN REGIA ACADEMIA ABOËNSI
PRÆSIDE
VIRO *MAXIME REVERENDO atque* CELEBERRIMO

DN. DOCT. JACOBO GADOLIN,
SCIENT. NAT. *PROFESSORE* REG. & ORD.
ACAD. SCIENT. HOLM. MEMBRO
& FACULT. PHIL. h. t. DEC.

PUBLICO EXAMINI SUBJICIT

FRIDERICUS PRYSS,

DIE XVI. JUNII ANN. MDCCLIX.
L. H. Q. A. M. C.

ABOÆ, Impressit DIRECT. & TYPOGR. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

S:Æ R:Æ M:TIS
SUMMÆ FIDEI VIRO,
Illustrissimo & Celsissimo
COMITI ac HEROI,

D^{N.} CAROLO GUSTAVO TESSIN,

Regis Regnique Svio-Gothici SENATORI,
Cancellariæ Regiæ PRÆSIDI,
Supremo Aulæ MARESCHALLO,
Regiæ Celsitudinis, *PRINCIPIS* Successoris,
GUBERNATORI,
Regiæ Academiæ Aboënsis CANCELLARIO,
Ordinum Regiorum EQUITI,
COMMENDATORI & CANCELLARIO,
Atque Ordinis Aquilæ Nigræ EQUITI,

MÆCENATI GRATIOSISSIMO.

QUo properas mea Musa? Cupis conscendere Divum
Atria celsa nimis, nec temeranda tibi?
Nonne vides stolidos, quos sic susceperis ausus?
Vel num te lateat sors Phaëthontis atrox?
Perge tamen: gelidi non est tibi caussa timoris,
Hoc HEROË nihil mitius orbis habet.
CUI Charites vultum, numerosos Svada lepores,
Et dedit ingenium vertice Nata Jovis.

QUI

QUI sibi subtractas Patriæ quoque devovet horas,
Auspiciis CUJUS Svethia tuta viget:
QUI fovet atque patrocinio sic promovet artes,
Ut merito Vatum Cynthius esse queat.
Rettulit HIC nostris modo Fennis aurea secla,
Et teneri affectus pignora mille dedit.
Utque Patris Patruique dies nunc fataque priscis
Mitius incedant hoc SUA cura facit.
Hinc TIBI, MAGNE HEROS, nostrarum destina rerum,
Musa cliens offert hoc pietatis opus.
Primitias nostras vultu dignare sereno,
Sic penitus fugiet, qui tenet ima, pavor.
Sicque novas reddet Musæ nova gratia vires,
Queis celebret laudes parva Thalia TUAS.
Gramina quot tellus, pelagus quot possidet undas,
Quot rutilas stellas grandis Olympus habet:
Tot quoque, CELSE COMES, maneant TE prospera fata,
Tot numeret lætos sancta senecta dies.

ILLUSTRISSIMÆ EXCELLENTIÆ TUÆ

devotissimus cliens
FRIDERICUS PRYSS.

RECTORI MAGNIFICO,
DN. SAMUELI PRYSS,
S. S. Theol. DOCTORI & PROFESSORI PRIMARIO,
nec non
Diœceseos Aboënsis ARCHI-PRÆPOSITO,

PARENTI OPTIMO, INDULGENTISSIMO.

DUm TUA, Care Parens, gratus benefacta recordor,
Detrectat solitos nostra Camena modos.
Ingenii vires moles immensa retundit:
Ipse pium numerus me negat esse satis.
Ergo DEUM precibus devotis pronus adoro,
Quod mihi tam facilem reddidit ipse Patrem.
Debeo namque TIBI vitalis luminis usum,
Et post supremum munera quæque DEUM.
A TE sum doctus pensis consvescere Phœbi,
TU pariter vitæ dux, cynosura meæ.

Non

Non refugis curas, non parcis ſumtibus amplis;
Scandere quo Pindi culmina læta queam.
Et ſubdis ſtimulos, nimium cohibesque calorem,
Ducere nec juvenem devia prava ſinis.
Paucis: TU mitis rariſſima Patris imago,
Cui bonitate parem vix feret ulla dies.
Suſcipias igitur facilis, quod porrigo ſcriptum,
Hoc precor obſequii pignus habeto mei.
Ultra nil valeo, ſed & hoc ſine pondere munus;
At pondus pietas, votaque juncta dabunt.
Vive diu felix, voto & felicior omni,
Uſque TIBI Parcæ ſtamina læta neant!
Vive decus Pindi, noſtræ ſpes magna ſalutis,
Noſter amor nobis vive valeque diu!

PARENTIS INDULGENTISSIMI

obedientiſſimus filius,
FRIDERICUS PRYSS

AUCTORI.

GLoria PRYSSIADUM! Reverendi dulce Parentis
Delicium! Patrii stella futura poli!
Almi Spes Pindi! Studiosæ Gemma coronæ!
A teneris clarii gratia multa chori!
Res est sancta fides toto rarissima mundo;
Vulgus amicitiæ nomen inane crepat.
Non latet in quavis excellens unio concha:
Nec rectos animos pectora quæque gerunt.
Te tamen inveni verique bonique tenacem:
Nec simulare mihi, nec dare verba soles.
Te tamen inveni sincerum semper amicum:
Non latet in nitido pectore mica doli.
Dum Te docta vehit virtus ad culmen honoris,
Non decet in tacito gaudia ferre sinu:
Postulat officii ratio pia plectra movere;
Sed lyra fracta negat dulce sonare melos.
Pristina siccavit macilentus flumina morbus;
Parcius & pigrius jam mihi vena fluit.
Singula dum rigido quatiuntur frigore membra,
Non bene procedit festa ciere metra.
Sed tamen invito Phœbo tentasse juvabit,
Num sciat appositos rauca Thalia modos.
Sunt ea, quæ scribis, solidissima, care Sodalis;
Temporis ast genio vix placitura tui.
Nunc Cererem, Floram, Faunam, celeremque Dianam,
Pana DEum pecoris, Triptolemumque colunt.
Tu Juga Sacra petens cur tam bona Numina temnis?
Est ea simplicior commodiorque via.

Quid

Quid sibi sæva volunt sævi spectacula ludi?
    Quid ballista crepat? Quid catapulta fremit?
Dura metalla boant, saltusque nemusque remugit:
    Multiplicant trepidos antra cavata sonos.
Atra favilla tonat, vibrant mortaria fulmen:
    Tecta fragore micant, valla tremore cadunt.
Fallor? An innocuis infers fera bella Camœnis?
    Nil tibi peccavit tam pia turba, reor.
Si tamen ulla premat Sapientes culpa Sorores,
    Hæc erit una, puto, cuique favere proco.
Est vitium sexus pulchris commune puellis,
    Quod tamen apta Patrum cura cavere solet.
Num cui tum fas est crassos convellere muros,
    Cum solis votis porta cupita patet?
Num cui tum fas est bombisque globisque tonare,
    Cum, qui valla tenent, sponte venire jubent.
Sed, qua cruda sibi ventosæ turba juventæ
    Quærere serta solet, Te pudet ire via.
Perfringas, patior, clivosi mœnia Pindi,
    Si Tua Te virtus tam sinat esse gravem;
Interea caveas, ne forte, foramine facto,
    In loca Sacra ruat rustica turba simul.
Sic geminata feres victricis præmia frontis:
    Cum lauru quercus serta decora dabit.
Tot Tibi certa precor divini signa favoris,
    Quot guttas oculus rore cadente videt!
Tot tua serta ferant felicis gaudia mentis,
    Quot decorant rutilum sidera clara polum!

Gratulabundus cecinit tuus ex asse

LAUR. OL. LEFRE'N.

AUCTORI.

Sol fere dimidium nuper confecerat orbem,
Et texère altum nubila nulla polum,
Ipsa levis zephyri spiravit molliter aura,
Nec nimio tellus tosta calore fuit.
Omnia ridebant. Campus, nemus omne nitebat,
Ludebantque simul Chloris & alma Ceres.
Garrula cantabat brevibus Philomela sub umbris,
Et casus solito dulcius orsa queri.
Pan Satyris mistus silvis saltabat amœnis,
Formabant varios Nereidesque gyros.
Sepositis rastris curvi cecinêre coloni,
Libantes dulci pocula plena mero.
Celsa Dii pariter linquentes atria cœli
Parnassi nitidum tunc petiêre jugum.
Argutis autem salibus dum mille jocantur,
Et variis fallunt tempora grata modis;
Mons nimium quatitur, tellus tremefacta remugit,
Atque gravi sonitu rura propinqua boant.
Hinc catapulta trabes, illinc ballista molares,
Et tormenta globos faucibus usque vomunt.
Fumosis nebulis almus glomeratur Olympus,
Atque Deûm bombus dissilit ante pedes.
Juppiter interea meditans nova fulmina secum,
Ad trepidos Divos talia verba dedit:
Fallor an hic alter moveat fera bella Typhœus,
Congestisque polum montibus ipse petat.
Num praestet, dubito, cœlestia templa reverti,
Mentitis formis vel juvet ire Deos.
Hoc omen Pallas levem & indignata timorem;
Laetitiam, dixit, murmura saepe vehunt.

Mercu-

Mercurium subito ventorum mittit ad antra,
Æolus ut nubes dissipet axe graves.
Ergo ruunt venti, pulsantque volumina fumi,
Atque brevi rursus facta serena dies.
Agnoscunt vanum jam Numina laeta tremorem,
Et volucres glandes vertice prona vident.
En Juvenis, sic Pallas ait, qui dirigit ictus,
Ut feriat positum Machina rite scopum.
Quique suo radio metitur in aethere fluxo,
Quas spiras volitans tramite bombus agit.
Credita vix aliis felici indagine pandit,
Atque Mathematico cuncta rigore probat.
Hoc scripto, pergit, Juvenum Lectissime, constat
Ingenii nobis ignea vena TUI.
Macte pari studio, Charitum Flos, magna TUORUM
Spes, Heliconiadum portio grata chori.
En via lata patet ducens ad culmen honoris;
Hac immortalis gloria parta TUIS.
Hac PATRIS, hac PATRUIque TUI vestigia cernes;
Hanc ABAVUS, praestans hanc quoque trivit AVUS.
Ergo velut soleas, age, lumina tanta sequaris,
Parque eris his tandem moribus, ingenio.
Perge simul nitidis scriptis clarescere mundo;
Sic TE promeritus sponte sequetur honos.
Interea TIBI, PRYSS, vix sufficit una corona;
Mars igitur quernam, Lauream at ipsa dabo.
Dixerat. Adplausu testantes gaudia Musae,
Protinus unanimes hoc cecinêre melos:
Dum bombus curvam projectus in æthere currit,
PRYSS erit Aonidum gloria, dulcis amor.

JOHAN BILMARK.

I. N. J.

QUemadmodum plantæ varia admodum desiderant temporum intervalla, antequam ad justam perveniant firmitatem, aliæ nimirum præcoces subministrant fructus, aliæ contra post plurium annorum seriem demum maturescunt; ita quoque scientiarum quædam rapidis adeo passibus ad suum tendunt fastigium, ut natæ simul & perfectæ videantur, aliæ autem, præsertim quæ observationibus & experimentis nituntur, lentis gradibus atque operosis moliminibus maturitatem quandam consequuntur. Fidem dictis vel solæ faciunt disciplinæ Mathematicæ. Harum enim partes quædam ita dudum sunt elaboratæ, ut nihil in his jure desiderari posse videatur; nonnullæ vero, inprimis quæ Mathesin mixtam constituunt, a perfectionis culmine longius absunt. Immo quis ignorat, universam rerum naturam, numero licet ac mensura determinatam, adeo inexplicabili serie connexam tamen esse, ut nodis Gordiis istis omnibus solvendis vel futura secula suffectura haud ſine temeritatis nota quisquam affirmaverit. Inter has medio fere loco eſt Balliſtica, cui excolendæ multam induſtriam atque ingentes pecuniæ ſummas impenderunt veteres: quosdam illorum ad hoc ſtudium ſalutis & conſervationis cura, alios gloriæ cupiditate excitantibus. Progreſſuum eorum in hac diſciplina ſpecimen traditurus, non coloſſum loquar Rhodienſem, pretio Machinarum, quas ad oppugnationem unius urbis adhibuerat DEMETRIUS POLIORCETES, comendabilem; neque MARCELLUM, invictasque Romanorum Legiones, Machinis ARCHIMEDIS ſpe occupandarum Syracuſarum diu fruſtratas adducam: ſat erit Catapultas memoraſſe atque Balliſtas, ſtupenda certe monſtra, quæ dum torres facesq; jactabant, ſagittarum imbres emittebant, atque ingentia evomebant ſaxa, terrorem undique injiciebant, quocunque ſuum tendebant curſum, horrendam ſemper afferentes cladem atque calamitatem. Binas vero haſce machinas utut diſtinctas exhibeant Scriptores, adeo ut Balliſtas ad ſaxa atque lapides emittendos, catapultas vero ad ligna aliaque leviora corpora projicienda, deſtinatas fuiſſe indicent; paſſim tamen easdem confundunt alii. Quicquid ſit, Machinarum harum effectus tantos prædicant, quantis producendis ullas fore ſuffecturas haud facile quis comprehendet. Stupet animus profecto, dum cogitat ingentia ſaxa rapidiſſimo lata motu angulos turrium disrumpentia, profundiſſimos phalangum ordines ſuſtollentia, omniaque illis objecta, fulminum inſtar, evertentia.

Nec

Nec vicina tantum corpora indomitæ Ballistarum vi exposita; sed remota quoque & longius distantia violenter ab ipsis fuerunt conquassata. Ut enim reticeamus molares ponderis Libr. CCC. ad distantiam pedum CXXV projectos; ATHENÆUM Ballistas construxisse novimus, quæ licet non nisi parum duorum pedum excederent longitudinem, tantam tamen projectis communicarent vim, ut non nisi absoluto D. passuum intervallo in terram deciderent. Plura huic similia exempla, quæ partim a JOSEPHO, partim ab aliis antiquiorum temporum Scriptoribus afferuntur, sicco jam præterimus pede. Habeant vero sibi catapultas atque ballistas suas veteres Mavortes; nec enim est ut inventa eorum lippis amplius inspiciamus oculis. Tormenta namque bellica, quæ detecto pulvere pyrio sensim jam invaluerunt, nihil fere nobis relinquunt, quod in hoc machinarum genere amplius desideremus. Tenuia vero cum sint omnia humanarum rerum initia; mirum non est, pleraque artis Ballisticæ mysteria primos scientiæ hujus cultores ita latuisse, ut effectus tormentorum bellicorum attoniti potius mirari, quam in suos usus rite adhibere, aut etiam leges motus a pulvere pyrio in globo producti enucleare & determinare sategerint. Leges enim motus tam compositi quam accelerati, & Algebram, commodissimam haud raro illam in rebus arduis cynosuram, ignorantes, haud meliorem habuerunt sortem, quam qui per spissas tenebras, caliginosa loca atque incognita rura sine perito

rito ductore vagantur, in devia quævis & horrenda sæpius incidentes præcipitia. Hi proinde supposuerunt globum e tormento bellico explosum in linea recta ferri, quamdiu vis ipsi a pulvere pyrio impressa gravitatem corporis excederet, æquilibratis vero hisce viribus curvam quandam a globo describi, donec diminuta paulatim vi projectionis, in linea recta, quod reliquum viæ esset, deorsum ferretur corpus. Enimvero sicut longo usu & sedula attentione veterum speciosæ hypotheses auctoritatem suam sensim amittunt; ita paulo post invenerunt Mathematici superioris subsellii, globum e tormento projectum integro suo motu curvam quandam describere. Hujus autem natura vel ideo difficilior explicatu videbatur, quod in atmosphærico spatio nulla sui relinqueret vestigia conspicua. Experientia tamen exploratum habebant, amplitudines jactuum esse longissimas, angulo elevationis tormenti 45° existente. Quod vero curva a globo tormentario descripta inter Parabolas sit referenda, dignum erat inventum, cujus honorem sibi vindicat, magnum illud orbis eruditi lumen, *Galilæus a Galilæis*, rationes simul, quas inter se habent amplitudines jactus pro diversa tormentorum ad horizontem elevatione, eleganter determinans. Varia sequentium Mathematicorum in artem Ballisticam merita commemorare, uti nimis longum, ita etiam parum utile esset opus; cum hæc cognitio ex scriptis clarissimorum Virorum abunde comparari possit. Quod igitur præsens attinet opusculum,

lum, in quo theoriam qualemcunque tradere conati sumus artis Ballisticæ, monuisse juvabit, nos ubique supponere motum corporum in medio non resistente fieri. De cetero juveniles nostras meditatiunculas C. L. iterum iterumque commendamus; & si hæc tenuia nimis videantur, in præsenti tamen æqui bonique easdem consulat. Speramus enim maturiorem ætatem, DEO favente, maturiora, ipsiusque digniora attentione fore exhibituram.

PROBLEMA I. *Fig. 1.*

Si corpus quoddam grave vel parallele vel oblique ad horizontem projiciatur, invenire curvam, quam motu suo describit.

Concipiamus, quod corpus propositum cadat ex A in B, & in puncto B motus illius directio ex verticali, quæ hactenus fuerat, in aliam secundum BC mutetur, sed tamen absque omni velocitatis acquisitæ jactura. Pergat igitur corpus secundum BC motu semper uniformi; quare cum idem a gravitate sua deorsum simul prematur, a duabus simul viribus non conspirantibus corpus in motu suo urgetur, & proinde eodem temporis momento, quo corpus vi secundum directionem BC agente translatum fuit ad rectam quamvis DH ipsi AB parallelam, erit idem vi gravitatis depressum infra rectam BC ad locum quendam H in recta DH sumtum (*per princip. Mechanic.*). Compleatur jam paral-

parallelogrammum BLHD. Ulteriusque ponatur AB $=a$, Tempus, quo corpus cadit per AB $=t$, Tempus per BD = tempori per DH $=T$, DH = BL $=x$, atque BD = LH $=y$. Igitur, cum corpus cadendo per AB illam acquirat velocitatem, qua eodem tempore t percurrere possit duplum ipsius AB motu æquabili (*per princ. Mech.*), atque insuper corpus secundum directionem BC motu semper æquabili feratur (*per hypothesin*); erit 2AB : BD : : t : T. Eodem vero tempore, quo corpus motu æquabili percurrit BD, absolvit quoque motu accelerato, gravitate scilicet sua actum, rectam lineam DH. Quamobrem, cum spatia motu accelerato confecta sint inter se, ut quadrata temporum (*per princ. Mech.*); erit AB : DH : : tt : TT; & consequenter, extracta radice quadrata, erit $\sqrt{AB} : \sqrt{DH} :: t : T$; seu $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: t : T$. Enimvero (per modo demonstrata) est $2a : y :: t : T$; ergo etiam $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: 2a : y$, & proinde $2a\sqrt{x} = y\sqrt{a}$. Atque elevando ad secundam dignitatem erit $4aax = ayy$, adeoque $4ax = yy$; quæ æquatio, cum exprimat naturam Parabolæ Apollonianæ, evidens est, corpus grave dicto modo projectum describere Parabolam. Q. E. I.

Coroll. I. Quoniam parameter diametri BG parabolæ HBH $=4a$; erit eadem parameter = 4AB. Quamobrem corpus cadendo per quartam parametri partem illam acquirit velocitatem, qua vel parallele vel oblique ad horizontem projicitur.

Coroll. II. Quoniam porro corpus ex B directione BC projectum, vi gravitatis suæ deorsum

in

in lineis ad horizontem perpendicularibus continuo descendere cogitur; evidens est, quod linea curva BHF a linea recta BC magis magisque perpetuo recedat, adeo ut linea directionis BC non nisi in unico puncto B curvæ propositæ occurrere queat; quamobrem linea BC tangit Parabolam in puncto B, unde motus incipit.

COROLL. III. Sit diametri BG parameter $= p$; erit $AB = \frac{1}{4}p$, & proinde linea AE ex puncto A perpendiculariter ad AB ducta erit directrix parabolæ; hoc est, omnes lineæ AB, KH, EF, ex punctis B, H & F parabolæ parallele ad AB ductæ, sunt æquales distantiis punctorum B, H & F a foco parabolæ. Quid? Quod AE sit directrix non solum parabolæ BHF, verum etiam omnium parabolarum, quæ describuntur a corpore ex B secundum quamcunque directionem projecto, velocitate & vi projectionis manente illa, quam acquirit corpus cadendo per AB.

COROLL. IV. Quoniam (*per naturam Parabolæ*) AB est æqualis distantiæ foci a puncto B, centro B radio BA describatur circulus, qui secabit Parabolæ propositæ axem in puncto quodam, quod erit focus parabolæ. Ponamus porro, quod corpus secundum aliam quamcunque directionem, quam BC, velocitate cadendo per AB acquisita projiciatur, & describat Parabolam; eodem prorsus modo demonstrabitur, quod circulus centro B & radio BA descriptus secet etiam axem hujus Parabolæ in puncto, quod est focus ejusdem. Cumque

hæc

hæc argumentandi ratio ſemper ſibi conſtet; evidens eſt, quod circulus centro B radio BA deſcriptus ſit locus focorum in omnibus parabolis, quæ deſcribuntur a corpore ſecundum quamcunque directionem obliquam ex puncto B velocitate per AB acquiſita projecto.

Coroll. V. Fiat denique angulus DBO æqualis ang. ABD; igitur cum recta linea BC tangat Parabolam in puncto B, recta linea BO tranſibit per focum Parabolæ (*per Geom. Subl.*). Et ſiquidem circulus AO eſt focus omnium Parabolarum dicto nuper modo deſcriptarum; hic circulus ſecabit lineam BO in puncto O, foco Parabolæ propoſitæ. Quamobrem ſi per punctum O ducatur recta linea MNOP parallela ad diametrum BG; erit MNOP axis Parabolæ, cujus vertex eſt in N, directrix recta AEM, atque parameter axis $=$ 2OM $=$ 4ON.

PROBLEMA II. *Fig.* 2.

Datis angulo elevationis tormenti, atque velocitate, qua corpus ex eodem exploſum movetur, invenire amplitudinem jactus, quando tormentum & ſcopus feriendus ſunt in eodem plano horizontali.

Geometrice. Sit ang. elevationis tormenti DBE, velocitas corporis projecti æqualis illi, quam corpus acquirit cadendo per altitudinem AB, atque ſcopus feriendus in M; adeo ut ducta recta BM ſit normalis ad axem Parabolæ verticalem HFE. Ducatur porro ex puncto F, foco parabolæ, recta FN

paral-

parallela ad directricem AH vel rectam BM. Igitur, cum recta AB & Parabolæ axis HFE sint inter se parallelæ; erit etiam FN = BE. Ex natura autem Parabolæ est BM = 2BE; proinde erit quoque BM = 2FN. Enimvero ang. ABD est complementum anguli elevationis DBE ad rectum; & ang. ABF, cujus sinus est FN, si recta BF sumatur pro Sinu Toto, est æqualis 2 ang. ABD; ergo (*per demonstr.*) est amplitudo jactus BM ad sinum anguli, qui est duplus complementi anguli elevationis, in ratione dupla.

Definitio. Complementum anguli elevationis ad rectum vocetur *Angulus declinationis tormenti.*

COROLL. I. Amplitudines jactuum corporis eadem velocitate secundum quamcunque directionem projecti, sunt inter se, sicut sinus duplorum angulorum declinationis tormenti.

COROLL. II. Quo major sit angulus elevationis DBE, quam ang. 45°, eo minor est angulus declinationis ABD, adeoque etiam eo minor est ang. ABF; consequenter increscente angulo DBE, decrescit quoque anguli ABF sinus FN, & proinde etiam amplitudo jactus minor fiet. Ponamus ang. DBM esse rectum, quo in casu linea BD coincidet cum AB, adeoque FN = *o*; hoc est, corpus verticaliter projectum in eadem linea recta descendet.

Coroll. III. Ponamus angulum DBM esse 45°; evidens est, quod punctum F in hoc casu coincidet cum puncto I, in quo semicirculus AF*a* secat horizontalem lineam BM; & consequenter axis *HGf* tum tanget semicirculum in puncto I, atque linea FN coincidet cum semidiametro BI. Quamobrem amplitudo jactus in hoc casu erit 2BI = 2AB. Enimvero semidiameter seu sinus Totus est maximus omnium sinuum; ergo cum amplitudines jactuum sint inter se sicut sinus duplorum angulorum declinationis (Cor.I.), atque sinus dupli anguli 45° sit Sinus Totus, evidens est, quod ceteris paribus, amplitudo jactus sit maxima, angulo elevationis existente *45°*. Obiter tantum hic monemus, quod ad inveniendam lineam AB, per quam determinatur velocitas projectionis, nihil aliud requiratur, quam ut tormentum ad 45° elevatum explodatur, atque Geodætice determinetur amplitudo jactus BM. Hujus enim dimidium BI est = AB. Ex. gr. sit BM = *9000 ped.*; erit AB = *4500 ped.* atque velocitas projectionis tanta, ut globus quolibet *M''* motu æquabili absolvat *519, 6. pedes.*

Coroll. IV. Quod si angulus DBE fuerit minor 45°, verum quidem est, quod Parabolæ BGM majorem faciant angulum cum axe; propterea tamen non secant horizontalem lineam BM in punctis a B longius distantibus. E contrario secant horizontalem BM in punctis tanto vicinioribus puncto B, quanto ang. DBC fuerit acutior. Quo enim

nim minor est angulus DBE, quam 45°, eo major fiet ang. declinationis ABD; adeoque etiam hujus duplus ABF. Consequenter cum semicirculus AF*a* sit locus focorum in Parabolis, punctum F in nostro casu reperietur in quodam puncto quadrantis J*a*, ex. gr. in *f*, ex quo ducta recta linea F*n* est minor, quam BI, adeoque amplitudo jactus est minor, quam sub angulo 45°.

COROLL. V. Si angulus elevationis DBE fuerit major 45°, amplitudo jactus BM erit = 2FN; atque si ang. elevationis sit minor 45°, datur casus, quo amplitudo jactus sit = 2F*n* = 2FN (*per Coroll. IV.*). Inquirendum igitur nunc est, quantus sit hic minor angulus elevationis, ut amplitudo jactus sit æqualis illi, quam absolvit corpus sub dato angulo majori projectum. Sit itaque focus Parabolæ desideratæ B*g*M in puncto *f* (*per Coroll. IV.*); ex iis quæ modo demonstrata sunt, patet, rectam *fn* illi FN parallelam, bis sumtam esse æqualem amplitudini jactus sub angulo hoc minori. Cum vero (*per hypoth.*) amplitudines utriusque jactus sint æquales; erit quoque FN = *fn*; ideoque erit per puncta F & *f* ducta recta F*f* rectæ AB parallela; ac proinde circuli arcus F*f* per rectam BM bisecabitur in puncto I. Porro patet, quod sit ang. AB*f* duplus anguli declinationis quæsitæ. Dividatur igitur angulus AB*f* bifariam per rectam lineam BL; erit LBE ang. elevationis, sub quo, si projiciatur corpus, amplitudo jactus est eadem cum amplitu-

 dine

dine jactus sub angulo DBE. Enimvero cum ang. ABL = ang. LBf; erit etiam arcus AL = arc. Lf. Sed AL = AF + FL, atque Lf = LI + If = LI + FI = 2LI + FL; ergo habemus AF + FL = 2LI + FL = 2AD + FL. Consequenter est 2LI = 2AD, seu LI = AD; adeoque angulus LBE = ang. ABD. Dividatur adhuc angulus rectus ABE bifariam per rectam BK; erit ang. KBL = ang. DBK; quamobrem angulus LBE tantum deficit a semirecto, quantum ang. DBE excedit semirectum. Ergo amplitudines jactuum sunt æquales, quando alter angulus elevationis tantum exsuperat semirectum, quantum alter ab eodem deficit.

COROLL. VI. Concipiamus jam, quod corpus horizontaliter projiciatur secundum rectam BM, scopo ut ante in M constituto; erit angulus declinationis tormenti = 90°, adeoque hujus anguli duplus = 180°; cujus sinus = 0. Consequenter amplitudo jactus horizontalis in hoc casu seu punctum, quod feriet globus explosus in horizontali BM, est nullum extra B. Hoc etiam inde patet, quod corpus secundum rectam BM projectum vi gravitatis suæ ab eadem continuo recedat; seu BM tangat parabolam describendam. Ex his tamen non sequitur, globum e tormento in B explosum statim post B quieturum; revera enim motum continuat & scopum infra BM positum ferit, nisi prope B adsit ineluctabile obstaculum.

Analy-

Analytice. Sit velocitas, quam pulvis pyrius incensus globo imprimit, æqualis illi, quam globus cadendo per altitudinem AB acquirit; pro qualibet tormenti in B positi inclinatione invenienda est distantia BE in horizontali linea BM, ita ut linea HFE in E perpendicularis ad BM sit axis Parabolæ, quam globus projectus motu suo describit, unde amplitudo jactus BM determinabitur. Super rectam AB describatur semicirculus ASB. Igitur cum inclinatio tormenti data ponitur, sit hæc ang. LBE, qui proinde datur; consequenter datur etiam punctum S, in quo semicirculus ASB secat lineam BL. Sit jam AB $=a$, BO $=b$, (scil. per S ad AB ducta sit normalis SO, adeoque BO datur propter BS datam) BE $=x$; erit AO $=a-b$, atque amplitudo jactus BM $=2x$. Et (*per princ. Geometr.*) AO : OS : : OS : OB; adeoque OS $=\sqrt{ab-bb}$. Porro ex iis, quæ supra tradita sunt, patet quod circumferentia circuli centro B radio AB descripti in plano verticali isto, in quo posita est linea directionis tormenti, sit locus focorum omnium parabolarum, quæ describi possunt a globo cum data hacce velocitate, sub quocunque angulo elevationis, ex puncto B projecto; & quidem specialius, quod parabola illa quæ describitur, dato angulo elevationis LBE, habeat suum focum in puncto f, si videlicet sumtus sit arcus Af duplus ipsius AL, qui est declinationis tormenti; atque etiam quod per f ducta ipsi BA parallela recta fg sit axis hujus parabolæ secans rectam horizontalem BM seu amplitudinem quæsitam

 & nor-

& normaliter & bifariam in E. Itaque, ut inveniatur ratio inter incognitam quantitatem BE seu x, atque quantitates datas, ducatur per punctum f recta fn normalis ad AB, quæ proinde erit parallela ipsi SO; ducantur quoque radii Bf in circulo Afa & PS in circulo ASB. Constat jam *per constructionem* angulum aBf esse excessum duorum rectorum supra duplum angulum declinationis ABL; & angulum LBE esse excessum unius anguli recti supra eundem ang. declinationis ABL; itemque (*per naturam circuli*) angulum LBE, qui continetur linea circulum tangente BE atque secante BS per punctum contactus ducta, esse dimidium anguli BPS, qui est ad centrum insistens arcui resecto BS. Hinc vero sequitur, æquales esse angulos SPB & fBa, ideoque simila esse rectangula triangula SPO & fBn. Præterea constat (*per constructionem*), radium Bf esse duplum radii PS. Hæ vero lineæ, cum in singulis hisce triangulis similibus oppositæ sint angulis rectis; necesse est, ut recta fn quoque sit dupla rectæ OS. Ergo & recta BE, quæ est æqualis ipsi fn, erit dupla rectæ OS; unde tandem habetur $x = 2\sqrt{ab - bb}$; & proinde amplitudo jactus BM $=$ 2BE $= 4\sqrt{ab - bb} =$ 4OS. Q. E. I.

COROLL. I. Distantia igitur puncti E, per quod transit axis parabolæ, a tormento in B posito est æqualis duplæ lineæ OS in circulo ASB ductæ, atque amplitudo jactus BM quadrupla ipsius OS.

COROLL. II. Ducatur recta linea AS, atque centro

centro P ſemicirculi ducatur ſemidiameter PS; erit angulus elevationis tormenti LBE $=$ ang. BAS $= \frac{1}{2}$ ang. OPS. Enimvero ſi radius PS ſumatur pro ſinu Toto, OS eſt ſinus ang. OPS. Quamobrem cum amplitudo jactus BM $=$ 4OS (*per Coroll.* I.); amplitudo jactus eſt ſemper æqualis quadruplo ſinui dupli anguli elevationis tormenti, ſinu ſcilicet Toto exiſtente æquali dimidiæ altitudini, ex qua decidere debet corpus, ut acquirat velocitatem, qua projicitur. Et quoniam OB eſt ſinus verſus anguli OPS atque OB $=$ *g*E; erit altitudo ad quam adſcendit motu ſuo globus exploſus æqualis Sinui verſo dupli anguli elevationis. Si vero angulus inclinationis tormenti ſit 45°, altitudo globi maxima erit $\frac{1}{2}$ AB. Sin denique angulus inclinationis ſit major 45°, altitudo ad quam globus adſcendit, erit æqualis ſummæ ex Sinu Toto atque coſinu dupli anguli declinationis.

Coroll. III. Quoniam ſemidiameter PQ eſt maximus omnium ſinuum; evidens eſt, quod amplitudo jactus erit maxima, quando directionis linea eſt BQ, poſita PQ ad AB normali: ſed PQ $=$ PB, ergo etiam erit ang. PQB $=$ ang. PBQ $=$ ang. QBE $=$ 45°. Hoc eſt, ceteris paribus, amplitudo jactus eſt maxima, angulo elevationis tormenti exiſtente 45°.

Coroll. IV. Denique, quoniam ab utraque ſemidiametri parte duci poſſunt bini ſinus inter ſe æquales, ex. gr. OS $=$ *dδ*; erit quoque arcus A*d* $=$ *arc.* BS; & conſequenter arcus *d*Q $=$ arc. SQ, hoc

eſt arest, arcus dQB tantum excedit arcum 45° quantum arc. SB ab eodem deficit. Ergo amplitudines jactuum, ceteris paribus, sunt æquales, quando alter ang. elevationis tormenti tantum excedit semirectum, quantum alter elevationis angulus semirecto est minor. Sic amplitudines jactuum sunt æquales sub angulis 35° & 55°, item sub 20° & 70°, & sic porro. In praxi observamus, quod majoribus angulis utamur in projiciendis bombis, qui per tecta & tabulata ædium transibunt; minores autem adhibentur ad muros & parietes confringendos.

ILLUSTRATIO.

Sit AB = 750 *pert.* hoc est corpus projectum velocitate illa moveatur, quam acquirit cadendo ex altitudine 750 *pert.* Sitque angulus inclinationis LBE = 25° 40′; erit PB = 375 *pert.* & *per demonstr.* ang. SPB = 51° 20′, ac proinde posito Sinu Toto = 10000000, erit sinus ang. SPB = 7807940. Fiat igitur 10000000 : 7807940 : : PB (375) : OS = 292, 79 *pert.* Consequenter 4OS = BM = 1171, 16 *pert.* Sin vero angulus elevationis fuisset 45°, & PQ = 375 *pert.* inventa BM = 4PQ = 1500 *pert.* Eodem modo calculus procedit in aliis quibuscunque similibus casibus.

PROBLEMA III. *Fig. 3.*

Ponamus, quod scopus feriendus non sit in eodem plano horizontali cum tormento, sed, ut communiter fieri solet, vel supra vel infra horizontem tormenti constitu-

constitutus; sintque datæ tam altitudo apparens hujus scopi, quam etiam inclinatio tormenti & velocitas projectionis, invenire amplitudinem jactus in recta, quæ per tormentum & scopum transit.

Sit ut ante AB altitudo, ex qua decidere debet globus, ut acquirat velocitatem æqualem illi, qua ex tormento projicitur, sitque DBM angulus inclinationis tormenti. Centro B radio BA describatur circulus ADI, sumto arcu DF = arc. AD; erit focus parabolæ desideratæ in F; cujus proinde axis est recta HFE ad BM normalis. Sint positione datæ duæ rectæ, per punctum B ductæ BN, infra vel supra horizontem protensæ, in quarum alterutra scopus appareat. Sit quoque N punctum, per quod in utrovis casu a trajectoria aut globo secantur hæ lineæ BN. A puncto N superiori demittatur NP normalis ad horizontalem BM; itemque ab altero isto inferiori N, ducta sit perpendicularis NR horizontali BM productæ occurrens in R: ducanturque Nn & NV parallelæ ipsi BM. Igitur, cum (*ex hypoth.*) dentur scoporum altitudines apparentes seu anguli NBP & NBR; in triangulis NBP & NBR ad P & R rectangulis, dantur omnes anguli, consequenter proportio laterum BN & BP, itemque BN & BR erit cognita. Sit igitur BN:BP::m:n; & BN.BR::m:n (supponimus scil. ad abbreviandum calculum, m & n exprimere proportionem inter BN, BP & BN, BR). Porro quoniam DBM angulus inclinationis tormenti datur, datur quoque angulus declinationis ABD, & proinde etiam sinus ejusdem DZ. Sit itaque DZ = b, AB = a,

 BN = x,

$BN = x$. Quoniam igitur $BN : BP :: m : n$; erit $BP = \frac{nx}{m}$. Similiter invenitur $BR = \frac{nx}{m}$. Ergo $NP = \sqrt{BN^2 - BP^2} = \sqrt{xx - \frac{nnxx}{mm}} = \frac{x}{m}\sqrt{mm - nn}$. Atq; $RN = \frac{x}{m}\sqrt{mm - nn}$. Ulterius est $BZ = \sqrt{AB^2 - DZ^2} = \sqrt{aa - bb}$. Sed (*per construct.*) est BE Sinus dupli anguli declinationis ABD, consequenter (*per princ. Trigonometr.*) est $BE = \frac{2BZ \times DZ}{AB} = \frac{2b\sqrt{aa - bb}}{a}$; proinde etiam $BM = 2BE = \frac{4b\sqrt{aa - bb}}{a}$. Ergo $PM = BM - BP = \frac{4b\sqrt{aa - bb}}{a} - \frac{nx}{m}$; atque $RM = BR - BM = \frac{nx}{m} - \frac{4b\sqrt{aa - bb}}{a}$. Notandum autem est, quod sit $FE = \sqrt{FB^2 - BE^2} = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{aa - \frac{4aabb - 4b^4}{aa}} = \frac{\sqrt{a^4 - 4aabb + 4b^4}}{a} = \frac{aa - 2bb}{a}$, & consequenter $FH = AB - FE = a - \frac{aa - 2bb}{a} = \frac{aa - aa + 2bb}{a} = \frac{2bb}{a}$. Unde elicitur axis HFE parameter $p = 2FH = \frac{4bb}{a}$. Enimvero (*ex natur. Parab.*)

est

est $p \times Gn = Nn^2$. Sed $Gn = GE - NP$, atque $Nn = EM - MP$; ergo $p \times GE - p \times NP = EM^2 - 2EM \times MP + MP^2$. Quamobrem cum (*ex natur. Parab.*) iterum sit $p \times GE = EM^2$; erit $p \times NP = MP\,(2EM - MP) = MP\,(BM - MP) = MP \times BP$. Ex quibus æquationibus post debitam valorum inventorum substitutionem obtinemus $\frac{4bb}{a}\left(\frac{x\sqrt{mm-nn}}{m}\right) = \frac{nx}{m}\left(\frac{4b\sqrt{aa-bb}}{a} - \frac{nx}{m}\right)$; atque $\frac{4bb}{a}\left(\frac{x\sqrt{mm-nn}}{m}\right) = \frac{nx}{m}\left(\frac{nx}{m} - \frac{4b\sqrt{aa-bb}}{a}\right)$. Et consequenter $\frac{nnxx}{mm} = \frac{4bnx}{am} \times \sqrt{aa-bb} \mp \frac{4bbx\sqrt{mm-nn}}{am}$; adeoque $\frac{nnx}{mm} = \frac{4bn}{am} \times \sqrt{aa-bb} \mp \frac{4bb\sqrt{mm-nn}}{am}$. Ex qua tandem æquatione elicitur $x = \frac{4bm}{ann}\left(n\sqrt{aa-bb} \mp b\sqrt{mm-nn}\right)$. Scilicet in æquatione inventa adhibendum est signum $-$, quotiescunque scopus appareat supra horizontem tormenti, signum autem $+$, quando scopus est infra BM. Q. E. I.

Constructio. Inter $a + b$ & $a - b$ quæratur mediæ proportionalis AB (*Fig. 4.*); erit $AB = \sqrt{aa-bb}$. Deinde fiat $an : 4bm ::$ AB ($\sqrt{aa-bb}$) ad quartam AC, erit $AC = \frac{4bm\sqrt{aa-bb}}{an}$. Similiter inter $m + n$

 atque

atque $m-n$ quæratur media proportionalis CD; erit $CD = \sqrt{mm-nn}$. Tandem fiat ficut ann: $4bbm$ :: CD ($\sqrt{mm-nn}$) ad quartam CN; erit $CN = \frac{4bbm\sqrt{mm-nn}}{ann}$. Et confequenter erunt amplitudines jactuum $AN = AC \mp CN = \frac{4bm}{ann}(n\sqrt{aa-bb} \mp b\sqrt{mm-nn})$.

Coroll. I. Quodfi jam fcopus appareat in eodem plano horizontali cum tormento; in hoc cafu evanefcet angulus NBM, & confequenter $PN = o$, nec non $BN = BM$, adeoque $m = n$, & proinde etiam $\sqrt{mm-nn} = o$. Quamobrem æquatio inventa $x = \frac{4bm}{ann}(n\sqrt{aa-bb} \mp b\sqrt{mm-nn})$ mutabitur in fequentem $x = \frac{4bnn\sqrt{aa-bb}}{ann} = \frac{4b\sqrt{aa-bb}}{a} = BM = 2BE$, hoc eft in noftro cafu amplitudo jactus æqualis Sinui anguli, qui eft duplus anguli declinationis tormenti, fumta AB pro finu toto; prorfus ut in antecedentibus invenimus.

Coroll. II. Sit porro vel altitudo vel depresfio adparens fcopi feu angulus $NBM = 45°$; erit $BP = PN$, & confequenter $BN : BP :: m : n :: \sqrt{2} : 1$, ergo $m = n\sqrt{2}$; atque $mm = 2nn$, nec non $mm - nn = 2nn - nn = nn$, & proinde $\sqrt{mm-nn} = n$.

Quam-

Quamobrem si in æquatione inventa $x = \frac{4bm}{ann}$ $(n\sqrt{aa-bb} \mp b\sqrt{mm-nn})$ substituatur hic valor, mutatur ipsa in sequentem $x = \frac{4bnn\sqrt{2}}{ann}(\sqrt{aa-bb} \mp b)$ $= \frac{4b\sqrt{2}}{a}(\sqrt{aa-bb} \mp b)$. Quomodo hæc æquatio construi debeat ex constructione superius allata facili admodum negotio colligi potest.

Coroll. III. Sit jam NBP $= 30°$; erit PN $= \frac{1}{2}$BN, adeoque BP $= \frac{1}{2}$BN$\sqrt{3}$. Ergo $m : n :: 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$; & proinde $n = m\sqrt{\frac{3}{4}}$, atque $nn = \frac{3}{4}mm$. Unde $mm - nn = mm - \frac{3}{4}mm = \frac{1}{4}mm$, &, extracta utrinque radice quadrata, erit $\sqrt{mm-nn} = \frac{1}{2}m$. Qui valor si in æquatione superius inventa $x = \frac{4bm}{ann}(n\sqrt{aa-bb}$ $\mp b\sqrt{mm-nn})$ substituatur, prodit $x = \frac{4bm}{\frac{3}{4}amm}$ $(m\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{aa-bb} \mp \frac{1}{2}bm) = \frac{8b}{3a}(\sqrt{3aa-3bb} \mp b)$; cujus quoque constructio facilis est.

Coroll. IV. Sit angulus elevationis tormenti DBM $= 45°$; erit in hoc casu BZ $=$ DZ, & consequenter $\sqrt{aa-bb} = b = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ceteris igitur iisdem manentibus, ut in ipsa propositione; erunt amplitudines jactuum BN $= x = \frac{4bbm}{ann}(n \mp \sqrt{mm-nn}) =$

 $\frac{2am}{nn}$

$\frac{2am}{nn}(n \mp \sqrt{mm - nn})$. Si vero angulus elevationis tormenti fuisset 60°; ang. declinationis ABD esset $= 30°$, & consequenter $DZ = b = \frac{1}{2}a$. Quamobrem $\sqrt{aa - bb} = \sqrt{aa - \frac{1}{4}aa} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, atque amplitudines jactuum in hoc casu $BN = \frac{4bm}{ann}(\frac{1}{2}an\sqrt{3} \mp b\sqrt{mm - nn})$ $= \frac{am}{nn}(n\sqrt{3} \mp \sqrt{mm - nn})$. Quarum æquationum constructiones faciliores sunt, quam ut hic apponi mereantur.

Coroll. V. Si angulus elevationis tormenti & altitudo apparens scopi sint inter se æquales, hoc est, si globus explodatur secundum directionem BN; evidens est, quod in hoc casu punctum D coincidet cum d, & consequenter erit $BN : BP :: Bd : db$, seu $m : n :: a : b$, ergo $an = bm$, & proinde etiam $n\sqrt{aa - bb} = b\sqrt{mm - nn}$. Unde porro constat, quod amplitudo jactus supra horizontem $BM = o$; seu globus non occurrit lineæ BN nisi in unico puncto B. Sed amplitudo jactus infra horizontem $BN = \frac{8bm}{an}\sqrt{aa - bb} = 8\sqrt{aa - bb}$, si videlicet recta BN, in qua hæc amplitudo consideratur, tantundem deprimatur infra horizontem, quantum altera illa BN seu linea directionis sursum elevatur. Porro in hoc ultimo casu, si sit angulus $NBP = 45°$; erit $\sqrt{aa - bb} = b$; adeoque amplitudo jactus nunc erit $= 8b = 4a\sqrt{2}$.

Cor. VI.

Coroll. VI. Sit denique altitudo apparens scopi, seu ang. NBP $=30^\circ$, atque angulus elevationis tormenti DBM $=45^\circ$; erit $m:n::1:\frac{1}{2}\sqrt{3}$, adeoque $\sqrt{mm-nn}=\frac{1}{2}m$ (per Coroll. III.). Ergo $b\sqrt{mm-nn}=\frac{1}{2}bm$. Porro erit etiam $\sqrt{aa-bb}=b$, & proinde $n\sqrt{aa-bb}=bn$; atque his valoribus in æquatione pro x pridem inventa substitutis, prodit $x=\frac{4bm}{ann}(bn\mp\frac{1}{2}bm)=\frac{4bbm}{ann}(n\mp\frac{1}{2}m)=\frac{4bbmm}{ann}(\frac{1}{2}\sqrt{3}\mp\frac{1}{2})=\frac{8bb}{3a}(\sqrt{3}\mp1)=\frac{4a}{3}(\sqrt{3}\mp1)$.

Scholion. Quod si inter tormentum in B positum atque scopum feriendum N nulla omnino sint obstacula, quæ impediant, quominus distantia scopi a tormento BP Geodætice determinetur, facillimo negotio invenietur distantia BN. Sit enim BP $=c$ & per regulas Trigonometricas ex dato ang. NBP quæratur NP $=d$; erit BN $=x=\sqrt{cc+dd}$. Atque sic intelligitur simul, utrum globus explosus scopum feriat, aut non.

PROBLEMA IV. *Fig.* 3.

Sit data velocitas, qua globus ex tormento projicitur, sitque data amplitudo jactus, eademque vel horizontalis, ut BM, vel ad horizontem sub dato angulo inclinata, veluti BN; invenire angulum elevationis tormenti, ita ut globus explosus feriat scopum propositum M vel N.

Inter tormentum in B & scopum feriendum M vel N ducatur recta BM vel BN. Igitur 1° si scopus

pus feriendus ſit in horizontalis BM puncto M, dividatur BM bifariam in puncto E; erit BE ſinus dupli anguli declinationis tormenti (*per Probl. II.*). Conſequenter ſi inferatur, ut AB : BE :: 10000000 ad quartum, huic numero in Tabulis ſinuum reſpondens angulus eſt ABF, & rurſus hujus dimidium eſt ang. ABD, qui eſt angulus declinationis, & hujus denique complementum ad rectum eſt alter angulus elevationis DBM. Alter autem ang. elevationis propoſito ſatisfaciens habetur, ſumendo angulum, qui tantum deficit a ſemirecto quantum DBM excedit ſemirectum (*per Coroll. V. Probl. II.*).

II° Si vero ſcopus feriendus non ſit in eodem plano horizontali cum tormento, ſed vel ſupra illud elevatus ut N; per punctum N ducatur recta perpendicularis NP occurrens directrici AH in puncto L. Fiat porro eadem Schematis propoſiti conſtructio, ut in Problemate præcedente; evidens eſt (*per Coroll. IV. Prop. I.*), quod peripheria circuli AFI centro B radio BA deſcripti ſit locus Focorum omnium Parabolarum, quæ deſcribuntur a corpore ex B illa velocitate projecto, quam acquireret globus cadendo ex A in B, ſecundum quas demum cunque directiones projectio fieri concipiatur. Ponamus jam, quod $AB = a$; igitur, cum in $\triangle$ BNP dentur omnes anguli & inſuper BN, data quoque erit $BP = b$, $PN = c$. Sit porro incognita $BE = EM = x$, $EF = z$; erit $FH = a - z$; adeoque axis HFE parameter $= 2a - 2z$, atque $PM = 2x - b$. Enimvero (*ex natur. Parab.*) eſt $BP \times PM$

=

$=(2a-2z)PN$; hoc eſt, poſt debitam ſubſtitutionem $b(2x-b)=(2a-2z)c$, ſeu $2bx-bb=2ac-2cz$; quæ æquatio ſequentem nobis ſuppeditat conſtructionem.

Super recta AB tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus AQB ſecans lineam BN in puncto Q. Deinde ex puncto A ad Q ducatur recta linea AQ, atque in directrice AHL capiatur AK $=\frac{1}{2}$BP, & ex K ducatur recta KFF parallela ipſi AQ, quæ ſecabit circuli peripheriam AFF in duobus punctis F & F, ſi problema binas admittat ſolutiones. Tanget autem linea KFF eundem circulum, ſi unicam tantum ſolutionem admiſerit problema: & denique linea KFF cadet extra circulum, ſi ſolutio problematis ſit impoſſibilis, ſeu ſi vis projectionis minor ſit, quam ut corpus eadem projectum attingat ſcopum propoſitum. Dico autem porro, quod linea KFF occurrens circulo AFF in punctis F & F ita ſecet eundem, ut puncta F & F ſint foci Parabolarum, quas dum deſcribit corpus, feriet ſcopum propoſitum N. Sit enim FE $=w$; igitur cum AK $=\frac{1}{2}$BP $=\frac{1}{2}b$, erit KH $=x-\frac{1}{2}b$, HF $=a-w$. Sed triangulum KFH $\backsim\triangle$ BAQ $\backsim\triangle$BNP; ergo erit FH : HK :: BP : PN, ſeu $a-w : x-\frac{1}{2}b :: b : c$, conſequenter etiam $ac-cw=bx-\frac{1}{2}bb$, vel $2ac-2cw=2bx-bb$. Unde porro apparet quod $w=z$; adeoque Parabolæ BGN focus eſt in F. Ulterius ex inferiori F ducatur recta FO parallela ipſi AB atque dividantur FH & FO bifariam in G & S; erunt G & S vertices Parabolarum deſideratarum. Tandem ex G & S ducantur rectæ lineæ Gg, Ss normales ad diametrum AB, secantes semicirculum AQB in punctis r & s, per quæ ex B ducantur rectæ Br & $Bs\Phi$, quæ erunt directiones juxta quas projectum corpus feriet scopum propositum in N.

III. Si denique scopus feriendus in N sit infra horizontalem lineam BM, ponatur $BR = b$, $RN = c$; ceteris iisdem manentibus, ut in casu II; pari prorsus ratione invenimus $2ac - 2cz = bb - 2bx$, cujus constructio ex illis, quæ modo attulimus, cum facile intelligatur, haud opus est ut illam adferendo, numerum linearum in *Fig. 5.* augeamus.

Idem aliter.

Sit $AB = a$; quoniam in $\triangle$ rectang. BNP dantur omnes anguli & hypothenusa BN; cognita etiam erunt latera BP & PN. Sit itaque $BP = b$, $PN = c$, $EF = z$; erit $FH = a - z$, atque Parabolæ BGN axis parameter $= 2a - 2z$, & $FG = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}z$. Quamobrem, cum (*ex natur. Parab.*) sit $BP \times PM = (2a - 2z) . PN$, habebimus $b \times PM = 2ac - 2cz$, & consequenter $PM = \frac{2ac - 2cz}{b}$. Proinde etiam $BM = BP + PM = b + \frac{2ac - 2cz}{b} = \frac{bb + 2ac - 2cz}{b}$; unde porro elicitur $BE = \frac{1}{2}BM = \frac{\frac{1}{2}bb + ac - cz}{b}$. Præterea est $GE = GF + FE = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}z + z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}z$. At (*ex natur. Parab.*) est $BE^2 = (2a - 2z) GE = (2a - 2z)$

$(\frac{1}{2}a$

$(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}z) = aa - zz$. Enimvero, (*per demonstr.*), est $BE = \frac{\frac{1}{2}bb + ac - cz}{b}$ ac proinde $BE^2 =$

$$\frac{\frac{1}{4}b^4 + abbc + aacc - bbcz - 2accz + cczz}{bb} = aa - zz;$$

ergo $\frac{1}{4}b^4 + abbc + aacc - bbcz - 2accz + cczz = aabb - bbzz$; seu $(bb + cc)zz - (2acc + bbc)z = aabb - aacc - abbc - \frac{1}{4}b^4$, & consequenter $zz - \frac{2acc + bbc}{bb + cc}z$

$$= \frac{aabb - aacc - abbc - \frac{1}{4}b^4}{bb + cc}.$$

Addatur utrique æquationis inventæ membro $\frac{(acc + \frac{1}{2}bbc)^2}{(bb + cc)^2}$; erit $zz -$

$$\frac{2acc + bbc}{bb + cc}z + \frac{(acc + \frac{1}{2}bbc)^2}{(bb + cc)^2} = \frac{aabb - aacc - abbc - \frac{1}{4}b^4}{bb + cc}$$

$$+ \frac{aac^4 + abbc^3 + \frac{1}{4}b^4cc}{(bb + cc)^2} =$$

$$\frac{aab^4 - ab^4c - \frac{1}{4}b^6 - aac^4 - abbc^3 - \frac{1}{4}b^4cc + aac^4 + abbc^3 + \frac{1}{4}b^4cc}{(bb + cc)^2}$$

$$= \frac{aab^4 - ab^4c - \frac{1}{4}b^6}{(bb + cc)^2} = \frac{b^4(aa - ac - \frac{1}{4}bb)}{(bb + cc)^2};$$ atque extracta utrinque radice quadrata, erit $z =$

$$\frac{acc + \frac{1}{2}bbc \mp bb\sqrt{aa - ac - \frac{1}{4}bb}}{(bb + cc)}.$$ Enimvero FE est cosinus dupli anguli declinationis tormenti (*per Corollarium I. Probl. II.*), quamobrem cum

$$FE = z = \frac{acc + \frac{1}{2}bbc \mp bb\sqrt{aa - ac - \frac{1}{4}bb}}{bb + cc};$$ atque ulte-

rius (*ex princ. Trigonometr.*) constat, quod sinus anguli simpli ABD sit $=\sqrt{\tfrac{1}{2}aa-\tfrac{1}{2}az}$, consequenter post debitam substitutionem prodeunt sinus ang. declinationis tormenti, qui iidem sunt cum cosinibus ang.

elevationis $= \dfrac{b\sqrt{\tfrac{1}{2}aa-\tfrac{1}{4}ac\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{aa-ac-\tfrac{1}{4}bb}}}{\sqrt{bb+cc}}$ Si vero

scopus fuisset infra horizontem tormenti constitutus, pari prorsus modo invenimus cosinus ang. elevationis tormenti $= \dfrac{b\sqrt{\tfrac{1}{2}aa+\tfrac{1}{4}ac\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+ac-\tfrac{1}{4}bb}}}{\sqrt{bb+cc}}$.

Coroll. I. Quoniam BE $= \dfrac{\tfrac{1}{2}bb+ac-cz}{b}$; ergo

etiam obtinemus BE $= \dfrac{\tfrac{1}{2}bb+ac}{b} -$

$\dfrac{ac^3+\tfrac{1}{2}bbcc\mp\tfrac{1}{2}bbc\sqrt{aa-ac-\tfrac{1}{4}bb}}{b(bb+cc)} = \dfrac{\tfrac{1}{2}b^4+abbc\pm bbc\sqrt{aa-ac-\tfrac{1}{4}bb}}{b(bb+cc)}$

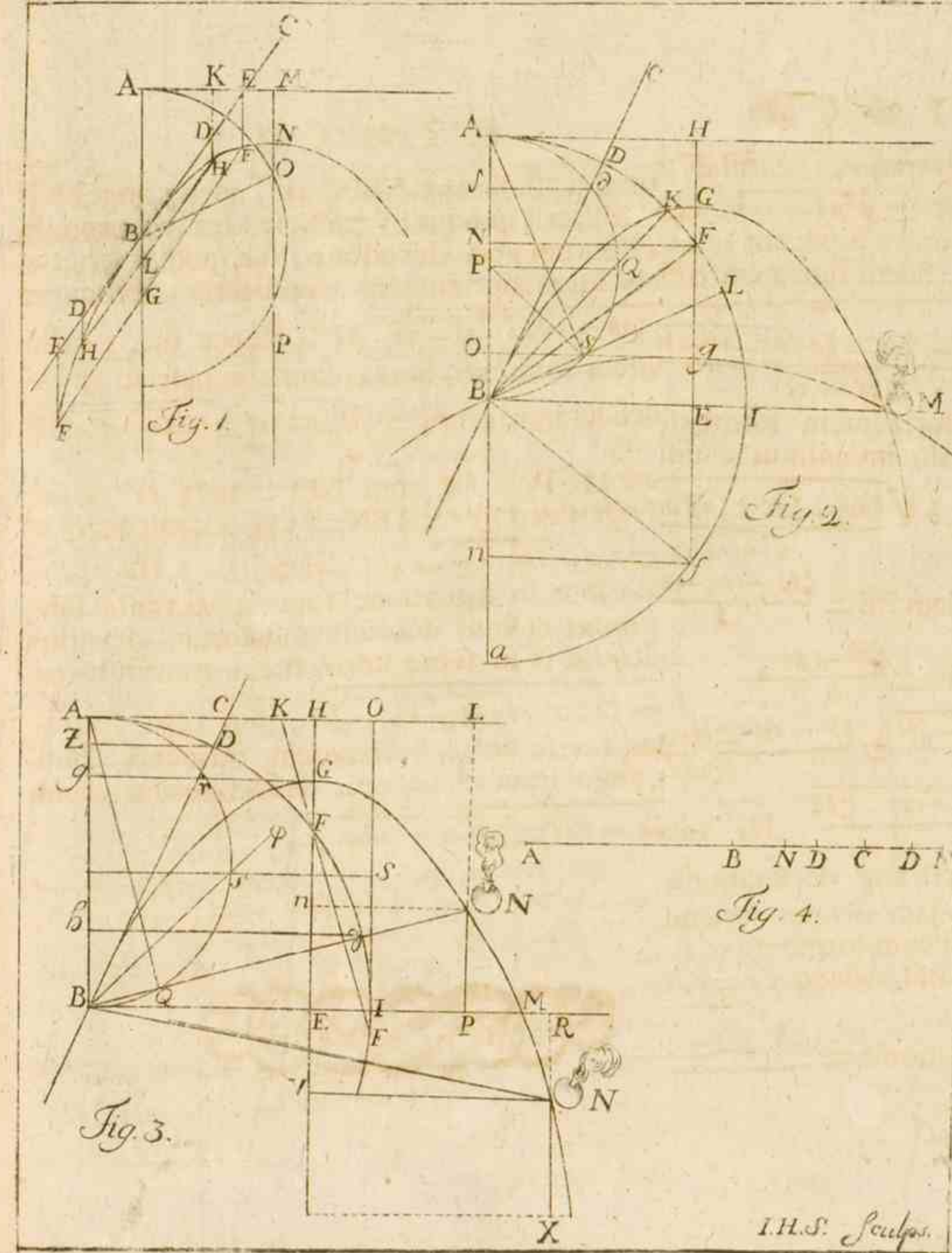
$= \dfrac{\tfrac{1}{2}b^3+abc\pm bc\sqrt{aa-ac-\tfrac{1}{4}bb}}{bb+cc}$. Hi valores dant sinus ang. qui sunt dupli ang. declinationis tormenti.

Coroll. II. Sit jam scopus feriendus in eodem plano horizontali cum tormento in B; coincidet igitur linea BN cum BM; adeoque $c=o$, consequenter cosinus ang. elevationis $= \dfrac{b\sqrt{\tfrac{1}{2}aa\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{aa-\tfrac{1}{4}bb}}}{\sqrt{bb}}$

$=\sqrt{\tfrac{1}{2}aa\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{aa-\tfrac{1}{4}bb}}$ Cor. III.

Coroll. III. Sit ang. NBP$=45^\circ$, adeoq; ang. BNP $=$ang. NBP, erit quoque BP$=$PN, seu $b=c$; & proinde cosinus duorum ang. elevationis, sub quibus ferietur scopus N supra horizontem constitutus, erunt $= \frac{1}{2}\sqrt{aa-\frac{1}{2}ab \pm a\sqrt{aa-ab-\frac{1}{4}bb}}$. At si scopus fuerit infra horizontem tormenti, bini cosinus angulorum elevationis desiderator. erunt $=\frac{1}{2}\sqrt{aa+\frac{1}{2}ab \pm a\sqrt{aa+ab-\frac{1}{4}bb}}$.

Coroll. IV. Sit ang. NBP$=30^\circ$, erit (*per princ. Trigonometr.*) $c=\frac{1}{2}$BN$=b\sqrt{\frac{1}{3}}$, & consequenter $bb+cc=4cc$, $\sqrt{bb+cc}=2c$, $\frac{1}{4}bb=\frac{3}{4}cc$. His proinde valoribus in æquatione superius inventa substitutis; erunt cosinus duorum angulorum elevationis, si scopus N sit supra horizontem constitutus $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}aa-\frac{3}{4}ac \pm \frac{3}{2}a\sqrt{aa-ac-\frac{3}{4}cc}}$. Sin vero scopus feriendus fuerit infra horizontem tormenti, bini cosinus angulorum elevationis desideratorum erunt $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}aa+\frac{3}{4}ac \pm \frac{3}{2}a\sqrt{aa+ac-\frac{3}{4}cc}}$.



MONSIEUR.

La vertu & l' erudition sont comme deux degrez, par qui on monte à la veritable felicité. C' est pourquoi, Monsieur, *Vous avez depuis la plus tendre enfance orné Vôtre esprit de plusieurs sciences, qui maintenant confirment Vos vertus & embellissent Vôtre erudition. C' est aussi moyennant Vôtre rare genie, que si dans Vos études se rencontrent, comme il arrive souvent, plusieurs obstacles facheux, alors tant s' en faut qu' en travaillant à les surmonter, Vôtre vertu s' affoiblisse & se laisse abatre, qu' au contraire*

Où le travail est grand, c' est là qu' elle s' efforce.

Ainsi, Monsieur, *on preuoit deja, que Vous allez contribuer à éterniser la grande reputation, que la celebre maison des* PRYSS *s' est acquise parmi les Sçavans. Pour prouver ce que je viens d' avancer, je ne citerai pas les preuves distinguées de Vôtre sçavoir & de la vivacité de Vôtre esprit, dont Vous avez deja en bien des occasions eu le public pour temoin. La belle Dissertation que Vous allez présentement publier, en est une toute nouvelle très convainquante. Pardonnez donc,* Monsieur, *que je prends la bardiesse de faire eclater ma sincere joie à une occasion si agréable. L' amitié, dont Vous m' avez bonoré, demande que je Vous prouve mon attacbement. Je ne saurois dignement faire Vos eloges; mais il suffit, qu' Apollon se bâte de recompenser Vos merites en liant sur Helicon une guirlande de laurier. Que le fortune soit Vous toujours propice. Que la posterité comte Vôtre nom parmi les grands Sçavants. Vôtre exemple soit une regle aux autres. Vivez toujours heureux & sans inquietude. Que la vertu & l' erudition Vous guident constamment. Alors je suis assuré, que le Tout-Puissant Vous comblera de biens & remplira les voeux ardens de Vos amis & particulierement de celui, qui sera toujours*

MONSIEUR

Vôtre

Très humble Serviteur

JONNE BILMARK.